<http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B5_%D0%BE%D0%B6%D0%B8%D0%B4%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5#cite_note-Vino-1>

**Математическое ожидание** — среднее значение случайной величины, это распределение вероятностей случайной величины, рассматривается в теории вероятностей[1].

В англоязычной литературе обозначается через \mathbb{E}[X][2] (например, от англ. *Expected value* или нем. *Erwartungswert*), в русской — M[X](возможно, от англ. *Mean value* или нем. *Mittelwert*, а возможно от «Математическое ожидание»). В статистике часто используют обозначение \mu.

Пусть случайная величина имеет дискретное равномерное распределение, то есть \mathbb{P}(X = x_i) = \frac{1}{n},\; i=1,\ldots, n.

Тогда её математическое ожидание

M[X] = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^n x_i

равно среднему арифметическому всех принимаемых значений.

Литература

1. «Математическая энциклопедия» / Главный редактор И. М. Виноградов. — М.: «Советская энциклопедия», 1979. — 1104 с. — (51[03] М34). — 148 800 экз.
2. *А. Н. Ширяев* 1 // «Вероятность». — М.: МЦНМО, 2007. — 968 с. — ISBN 978-5-94057-036-3, 978-5-94057-106-3, 978-5-94057-105-6

**Дисперсия случайной величины** — мера разброса данной случайной величины, то есть её отклонения от математического ожидания[1].

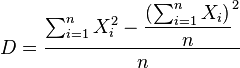
Пусть X — случайная величина, определённая на некотором вероятностном пространстве. Тогда дисперсией называется

D[X] = M\left[|X -M[X]|^2\right] 

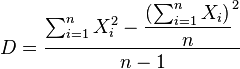
где символ M обозначает математическое ожидание.

**Генеральная совокупность, генеральная выборка** (от лат. *generis* — *общий, родовой,* в англ. терминологии — *population*) — совокупность всех объектов (единиц), относительно которых необходимо делать выводы при изучении конкретной проблемы.

Удобная формула для вычисления дисперсии случайной последовательности  X_1... X_n (генеральной совокупности):



Однако, так как оценка дисперсии по генеральной совокупности является смещённой, то для её подсчёта несмещенной оценки дисперсии, смещенную оценку необходимо дополнительно умножать на \frac{n}{n - 1}. Таким образом, итоговая формула будет выглядеть:



Литература

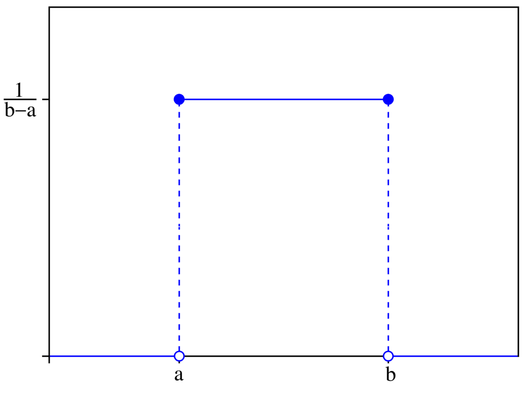
*1. Боровков А. А.* Глава 4. Числовые характеристики случайных величин; §5. Дисперсия // Теория вероятностей. — 5-е изд. — М.: Либроком, 2009. — С. 93-94. — 656 с.

**Непрерывное равномерное распределение**

**Непрерывное равномерное распределение** — в теории вероятностей – распределение случайной вещественной величины, принимающей значения, принадлежащие интервалу [a, b], характеризующееся тем, что плотность вероятности на этом интервале постоянна.

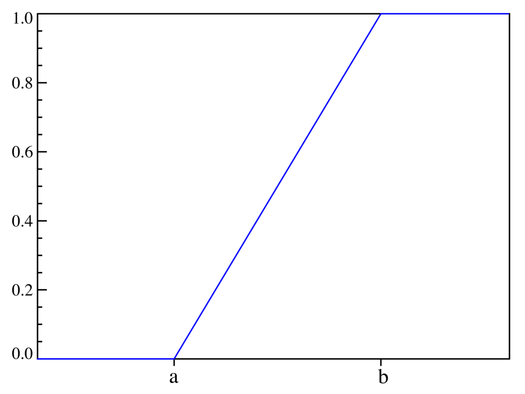
**Непрерывное равномерное распределение**

Плотность вероятности



**Непрерывное равномерное распределение**

Функция распределения



Говорят, что случайная величина имеет непрерывное равномерное распределение на отрезке [a,b]\!, где a,b\in \R (то есть, принадлежат точкам евклидова пространства) если её плотность f_X(x)\! имеет вид:


f_X(x) = \left\{
\begin{matrix}
{1 \over b-a}, & x\in [a,b] \\
0, & x\not\in [a,b]
\end{matrix}
\right..


**Момент случайной величины** — числовая характеристика распределения данной случайной величины.

## Определения

Если дана случайная величина \displaystyle X, определённая на некотором вероятностном пространстве, то:

* \displaystyle k-м **начальным** моментом случайной величины \displaystyle X, где k \in \mathbb{N}, называется величина

\nu_k = \mathbb{E}\left[X^k\right],

если математическое ожидание \mathbb{E}[*] в правой части этого равенства определено;

* \displaystyle k-м **центральным** моментом случайной величины \displaystyle X называется величина

\mu_k = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}X)^k\right],

* \displaystyle k-м **абсолютным** и \displaystyle k-м **центральным абсолютным** моментами случайной величины \displaystyle X называется соответственно величины

\nu_k = \mathbb{E}\left[|X|^k\right] и \mu_k = \mathbb{E}\left[|X - \mathbb{E}X|^k\right],

## Вычисление моментов

## Моменты могут быть вычислены напрямую через определение путём интегрирования соответствующих степеней случайной величины. В частности, для абсолютно непрерывного распределения с плотностью \displaystyle f(x), имеем:

\nu_k = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k\, f(x)\, dx,

если  \nu_k = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|^k\, f(x)\, dx<{+\infty} ,

а для дискретного распределения с функцией вероятности \displaystyle p(x):

\nu_k = \sum\limits_{x} x^k\, p(x),

если \nu_k = \sum\limits_{x} |x|^k\, p(x)<{+\infty}.

## Геометрический смысл некоторых моментов

* \displaystyle \nu_1 равняется математическому ожиданию случайной величины и показывает относительное расположение распределения на числовой прямой.
* \displaystyle \mu_2 равняется дисперсии распределения \displaystyle (\mu_2=\sigma^2) и показывает разброс распределения вокруг среднего значения.
* \displaystyle \mu_3, будучи соответствующим образом, нормализован, является числовой характеристикой симметрии распределения. Более точно, выражение

\frac{\mu_3}{\sigma^3}

называется коэффициентом асимметрии.

* \displaystyle \mu_4 контролирует, насколько ярко выражена вершина распределения в окрестности среднего. Величина

\frac{\mu_4}{\sigma^4}-3

называется коэффициентом эксцесса куртозиса распределения \displaystyle X.

**Коэффициент асимметрии** в теории вероятностей — величина, характеризующая асимметрию распределения данной случайной величины.

## Определение

Пусть задана случайная величина X, такая что \mathbb{E} |X|^3 < \infty. Пусть \mu_3 обозначает третий центральный момент: \mu_3 = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}X)^3\right], а \sigma = \sqrt{\mathrm{D}[X]} — стандартное отклонение X. Тогда коэффициент асимметрии задаётся формулой:

\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}.

**Коэффициент эксцесса** (коэффициент островершинности) в теории вероятностей — мера остроты пика распределения случайной величины.

## Определение

Пусть задана случайная величина X, такая что \mathbb{E} |X|^4 < \infty. Пусть \mu_4 обозначает четвёртый центральный момент: \mu_4 = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}X)^4\right], а \sigma = \sqrt{\mathrm{D}[X]} — стандартное отклонение X. Тогда коэффициент эксцесса задаётся формулой:

\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3.

**Среднеквадратическое отклонение** измеряется в единицах измерения самой случайной величины и используется при расчёте стандартной ошибки среднего арифметического, при построении доверительных интервалов, при статистической проверке гипотез, при измерении линейной взаимосвязи между случайными величинами. Определяется как квадратный корень из дисперсии случайной величины.

**Среднеквадратическое отклонение:**

\sigma=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\left(x_i-\bar{x}\right)^2}.

**Стандартное отклонение** (оценка среднеквадратического отклонения случайной величины *x* относительно её математического ожидания на основе несмещённой оценки её дисперсии):

s=\sqrt{\frac{n}{n-1}\sigma^2}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n\left(x_i-\bar{x}\right)^2};

где \sigma^2\,\! — дисперсия; x_i\,\! — *i*-й элемент выборки; n\,\! — объём выборки; \bar{x}\,\! — среднее арифметическое выборки:

\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i  =  \frac{1}{n} (x_1+\ldots+x_n).

Следует отметить, что обе оценки являются смещёнными. В общем случае несмещённую оценку построить невозможно. Однако оценка на основе оценки несмещённой дисперсии является состоятельной.

**Состоятельная оценка** в математической статистике — это точечная оценка, сходящаяся по вероятности к оцениваемому параметру.

**Точечная оценка** в математической статистике — это число, вычисляемое на основе наблюдений, предположительно близкое к оцениваемому параметру.

# Автокорреляционная функция

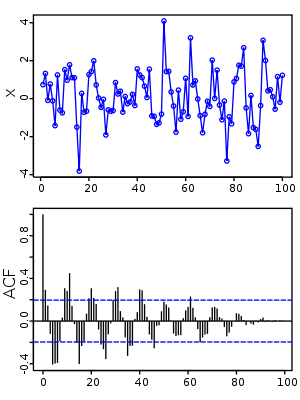
[](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Acf_new.svg?uselang=ru)

График 100 случайных величин со скрытой синусоидой. Автокорреляционная функция позволяет увидеть периодичность в ряде данных.

**Автокорреляция** — статистическая взаимосвязь между случайными величинами из одного ряда, но взятых со сдвигом, например, для случайного процесса — со сдвигом по времени.

**Автокорреляционная функция** (АКФ, ACF).

В обработке сигналов автокорреляционная функция (**АКФ**) определяется интегралом:

\Psi(\tau) = \int f(t) f(t-\tau) \mathrm{d}t

и показывает связь сигнала (функции \;f(t)) с копией самого себя, смещённого на величину \tau.

В теории случайных функций **АКФ** является корреляционным моментом двух значений одной случайной функции \;X(t):

K (t_1, t_2) = \mathbb{E}\left\{\left[X(t_1)-\overline{x}(t_1)\right]\left[X(t_2)-\overline{x}(t_2)\right]\right\}/\mathbb{D}

Здесь \overline{x}(t)=\mathbb{E}\left[X(t)\right], а \mathbb{E}\left[X(t)\right] — математическое ожидание.

График автокорреляционной функции можно получить, отложив по оси ординат коэффициент корреляции двух функций (базовой и функции сдвинутой на величину \tau), а по оси абсцисс величину \tau. Если исходная функция строго периодическая, то на графике автокорреляционной функции тоже будет строго периодическая функция. Таким образом, из этого графика можно судить о периодичности базовой функции, а следовательно, и о её частотных характеристиках. Автокорреляционная функция применяется для анализа сложных колебаний, например, электроэнцефалограммы человека.

## Применение в технике

Корреляционные свойства кодовых последовательностей, используемых в широкополосных системах, зависят от типа кодовой последовательности, её длины, частоты следования её символов и от её посимвольной структуры.

Изучение **АКФ** играет важную роль при выборе кодовых последовательностей с точки зрения наименьшей вероятности установления ложной синхронизации.

## Другие применения

Автокорреляционная функция играет важную роль в математическом моделировании и анализе временных рядов, показывая характерные времена для исследуемых процессов (см., например: Турчин П. В. Историческая динамика. М.: УРСС, 2007. ISBN 978-5-382-00104-3). В частности, циклам в динамике систем соответствуют максимумы на соответствующей автокорреляционной функции.

# Взаимнокорреляционная функция

**Взаимнокорреляционная функция** — стандартный метод оценки степени корреляции двух последовательностей. Она часто используется для поиска в длинной последовательности более короткой заранее известной. Рассмотрим два ряда f и g. Взаимная корреляция определяется по формуле:

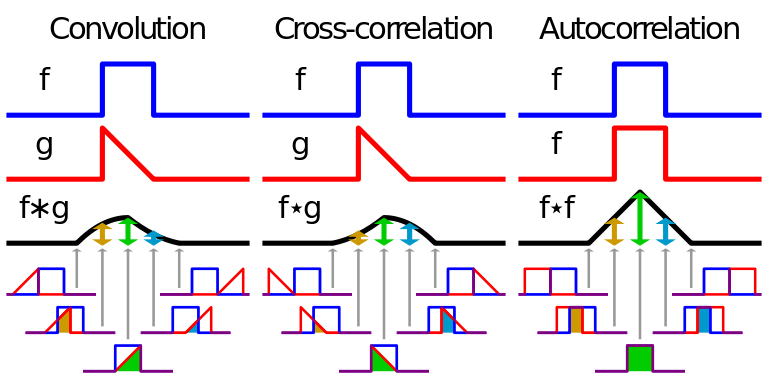
(f\star g)_i \ \stackrel{\mathrm{def}}{=}\  \sum_j f^*_j\,g_{i+j},

где i — сдвиг между последовательностями относительно друг друга, а верхний индекс в виде звёздочки означает комплексное сопряжение. В общем случае, для непрерывных функций *f* (*t*) и *g* (*t*) взаимная корреляция определяется как

(f \star g)(t)\ \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(\tau)\ g(t+\tau)\,d\tau,

Если X и Y — два независимых случайных числа с функциями распределения вероятностей соответственно *f* и *g*, тогда взаимная корреляция *f*  \star  *g* соответствует распределению вероятностей выражения  -X + Y. Напротив, свёртка *f*  *  *g* соответствует распределению вероятностей суммы X + Y.

## Свойства



Слева направо: свёртка, взаимная корреляция и автокорреляция

Взаимная корреляция и свёртка взаимосвязаны:

f(t)\star g(t) = f^*(-t)*g(t)

поэтому, если функции *f* и *g* чётны, то

(f\star g) = f*g

Также: (f\star g)\star(f\star g)=(f\star f)\star (g\star g)

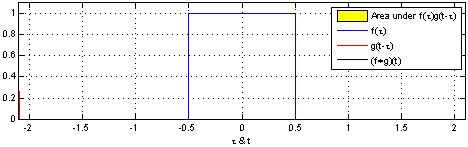
По аналогии с теоремой свёртки взаимная корреляция удовлетворяет

\mathcal{F}[f\star g]=(\mathcal{F}[f])^* \cdot (\mathcal{F}[g])

где \mathcal{F} означает преобразование Фурье. Данное свойство часто используется вместе с алгоритмами быстрого преобразования Фурье для эффективного вычисления величины взаимной корреляции.

Используется при обработке сигналов, например, для распознавания отраженного от объекта локационного сигнала (радаров, сонаров) в условиях помех. Также используется для анализа случайных процессов, например, в измерениях и статистике.

**Свёртка функций** — операция в функциональном анализе, показывающая «схожесть» одной функции с отражённой и сдвинутой копией другой. Понятие свёртки обобщается для функций, определённых на группах, а также мер. В математике, свёртка — это математическая операция двух функций *f* и *g*, порождающая третью функцию, которая обычно может рассматриваться как модифицированная версия одной из первоначальных. По существу, это особый вид интегрального преобразования.

[](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Convolution_of_box_signal_with_itself2.gif?uselang=ru)

Свертка двух прямоугольных импульсов: в результате даёт треугольный импульс.

## Свёртка функций

Пусть f,g:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R} — две функции, интегрируемые относительно меры Лебега на пространстве \mathbb{R}^d. Тогда их свёрткой называется функция f * g:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, определенная формулой

|  |  |
| --- | --- |
| (f * g)(x)\ \ \, | \stackrel{\mathrm{def}}{=}\ \int \limits_{\mathbf{R}^d} f(y)\, g(x-y)\, dy = \int \limits_{\mathbf{R}^d} f(x-y)\, g(y)\, dy. |

В частности, при \,d=1 формула принимает вид:

|  |  |
| --- | --- |
| (f * g)(x)\ \ \, | \stackrel{\mathrm{def}}{=}\ \int \limits_{-\infty}^{\infty} f(y)\, g(x-y)\, dy =  \int \limits_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, g(y)\, dy. |

Свёртка \,(f * g)(x) определена при почти всех x \in {\mathbf{R}^d} и интегрируема.

### Свойства

* Коммутативность:

\, f * g = g * f .

* Ассоциативность:

\, f  * (g  * h) = (f  * g)  * h.

* Линейность (дистрибутивность и умножение на число):

\, (f_1+f_2) * g =  f_1 * g + f_2 * g,\quad

\, f * (g_1+g_2) =  f * g_1 + f * g_2,\quad

\, (a f) * g = a (f*g) = f * (ag), \quad \forall a \in \mathbb{R}.

* Правило дифференцирования:

\, \mathrm{D}(f  * g) = \mathrm{D}f  * g = f  * \mathrm{D}g,

где \mathrm{D}f обозначает производную функции f по любой переменной.

* Свойство Фурье-образа:

\, \mathfrak{F}[f  * g] = \mathfrak{F} [f] \cdot \mathfrak{F} [g],

где  \mathfrak{F}[f] обозначает преобразование Фурье функции f.

**Литература**

* *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа, — М.: Наука, 2004 (7-е изд.).
* *Ширяев А. Н.* Вероятность, — М.: Наука. 1989.