

НАЦИОНАЛЬНЫЙ АВИАЦИОННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ.



Воронов С.И.
КВАДРАТУРНЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ
ТАБЛИЧНЫХ ФУНКЦИЙ С ПОСТОЯННЫМ ШАГОМ ПО
АРГУМЕНТУ

(СЕРИЯ - МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ В ИНЖЕНЕРНЫХ ЗАДАЧАХ)
БЛОК ЛЕКЦИЙ №2

Дополнительные лекции по численным методам
(Редакция от 2014г.)

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
Квадратурный метод левых прямоугольников	4
Квадратурный метод правых прямоугольников	5
Квадратурный метод трапеций	7
Пути повышения точности квадратурных методов.	9
Квадратурная формула Симпсона	11
Несколько модификаций квадратуры Симпсона	13
Рекомендуемая литература	19
Приложения	19

АННОТАЦИЯ

Материал данной лекции ориентирован на студентов первого курса. Основной задачей этой лекции является показать ту логику, по которой происходило развитие численных методов интегрирования функций заданных таблично с постоянным шагом, а также показать простейшие алгоритмы реализации таких методов. Кроме того, данная лекция призвана связать учебный материал дисциплин «Высшая математика» и «Вычислительная техника и алгоритмические языки», которые читаются студентам в первом семестре. Для более полного усвоения материала, лекция дополнена компьютерной программой, которая позволяет выполнять множество численных экспериментов с интегрированием табличных функций различными методами.

Последняя редакция лекции 21.08.2014

Воронов С.И.

Введение

“Решение множества инженерных задач просто невозможно, если Вы не располагаете методами и инструментами интегрирования таблично заданных функций”

Для вычисления интегралов таблично заданных функций применяются квадратурные методы, к числу которых относятся наиболее популярные методы левых и правых прямоугольников, трапеций, а также квадратурный метод Симпсона.

Для начала вспомним, что интегралом некоторой функции $F(X)$ в границах от X_{beg} до X_{end} является значение площади S , которая ограничена осью X и самой функцией $F(X)$ на заданном участке.

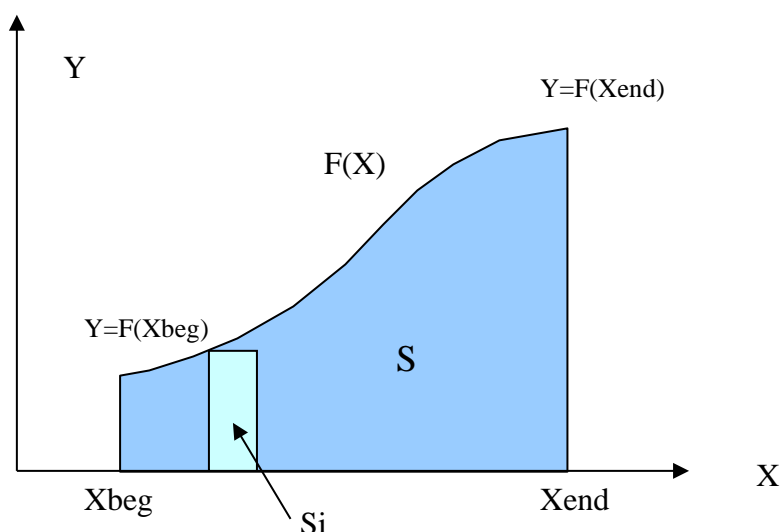


Рис. 1. Площадь под кривой $F(X)$

Такое значение интеграла непосредственно вытекает из его математического определения:

$$\int_{X_{beg}}^{X_{end}} F(X) \cdot dx = S = \lim_{\Delta X \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n=(X_{end}-X_{beg})/\Delta X} S_i = \lim_{\Delta X \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n=(X_{end}-X_{beg})/\Delta X} F(X_i) \cdot \Delta X$$

где S_i это площади элементарных прямоугольников, которые плотным образом размещаются внутри площади S полностью ее заполняя. Площади таких элементарных прямоугольников легко вычисляются как размер их основания $F(X_i)$ на их высоту ΔX . В случае предельного перехода (когда высота элементарных прямоугольников стремится к нулю) площадь, вычисляемая интегральной суммой S , бесконечно близко приближается к значению интеграла, чем и определяет его смысл.

В научной или технической деятельности функции $F(X)$, как правило, вначале становятся известными как наборы результатов измерений. Заметим, что при стремлении высоты элементарных прямоугольников к нулю, их количество n стремится к бесконечности. Очевидно, что практически невозможно потребовать бесконечное число значений (отсчетов Y) в таких наборах. Таким образом, возникает задача вычисления интегральной суммы S на ограниченном количестве участков в условиях, когда аналитический вид функции $F(X)$ нам еще неизвестен и применение аналитического интегрирования

невозможно. Такая задача вычисления интегралов относится к классу задач получивших наименование «численные методы математики».

Таким образом, вынужденно ограничиваясь конечным числом S_i в составе суммы S , мы будем получать только приближенные значения вычисляемых интегралов, причем точность вычисления будет тем выше, чем большее число элементарных площадей S_i мы можем себе позволить.

Итак, непосредственно из описанного выше способа вычисления интегральных сумм S определяются два классических квадратурных метода численного вычисления интегралов. Это методы левых и правых прямоугольников. Различие между этими методами заключается только в том, какое из ближайших значений $F(X_i)$ используется для вычисления элементарных площадей S_i . Рассмотрим эти квадратурные методы.

Квадратурный метод левых прямоугольников

Площадь элементарного прямоугольника S_i под кривой вычисляется как площадь прямоугольника, основание которого определяется по *левому* значению аргумента функции на участке.

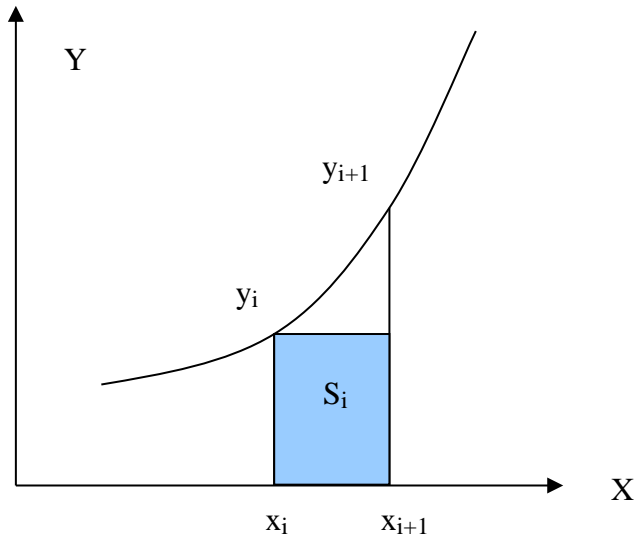


Рис. 2. Элементарный прямоугольник с основанием по левому отсчету $F(X_i)$

Для простоты ограничимся условием, когда высоты элементарных прямоугольников ($X_{i+1} - X_i$) равны между собой.

Такое ограничение поясняется тем, что для удобства дальнейшей обработки самыми разными математическими методами подавляющее большинство технических измерений и технических характеристик выполняются или представляются с постоянным шагом по аргументу.

Принимая такое ограничение, достаточно просто вычислить значение для произвольного S_i :

$$S_i = y_i \cdot (x_{i+1} - x_i) \quad \left| \quad x_{i+1} - x_i = const = h \right. = y_i \cdot h$$

Пусть индексация участков (или индекс i) начинается с нуля. Если в нашем распоряжении n -участков, то значение функции в точке $F(X_{end})$ уже не будет использоваться, поскольку оно определит S_i уже за пределами границ интегрирования. Таким образом, интегральная сумма S будет иметь вид:

$$S = \sum_{i=0}^{i=n-1} S_i = \sum_{i=0}^{i=n-1} y_i \cdot h$$

где высота каждого элементарного прямоугольника равна:

$$h = (X_{end} - X_{beg}) / n$$

Для примера приведем график изменения абсолютной ошибки AE при вычислении интеграла методом левых прямоугольников:

$$AE(X) = S(X) - \int_{X_{beg}}^X X^2 \cdot dx$$

Отметим, что точное значение интеграла (как функции от X) и соответственно площадь $S(X)$ изменяются по мере того, как аргумент X с шагом h возрастает в границах от $X_{beg} = 0$ до $X_{end} = 1$. Общее число участков (или n) равно 63:

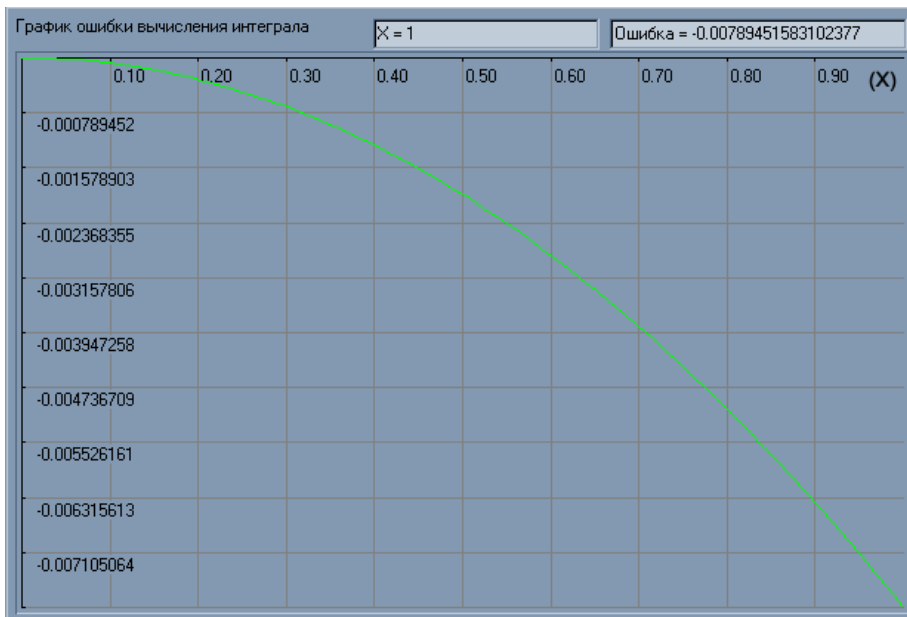


Рис. 3. График абсолютной ошибки вычисления интеграла как функции его верхнего предела методом левых прямоугольников

Квадратурный метод правых прямоугольников

Метод правых прямоугольников в некотором смысле является зеркальным по отношению к методу левых прямоугольников. Другими словами, площадь элементарного

прямоугольника S_i вычисляется как площадь прямоугольника, основание которого определяется по **правому** значению функции на участке.

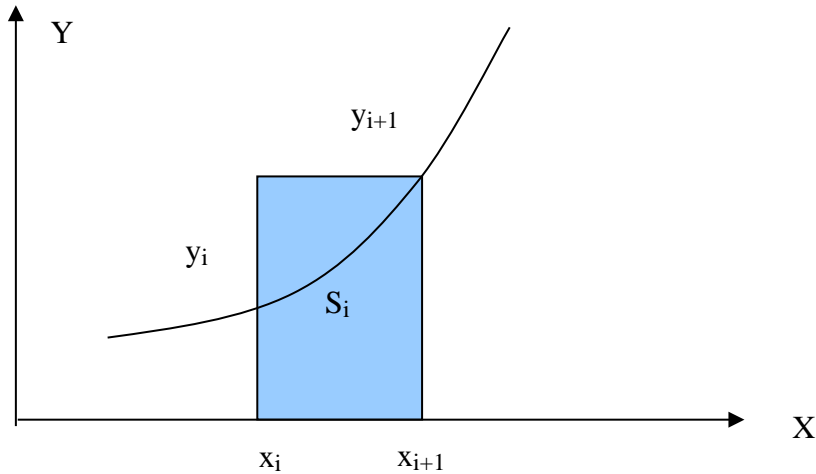


Рис. 4. Элементарный прямоугольник с основанием по правому отсчету $F(X_{i+1})$

Принимая аналогичное ограничение:

$$S_i = y_{i+1} \cdot (x_{i+1} - x_i) \quad \left| \quad x_{i+1} - x_i = \text{const} = h \right. = y_{i+1} \cdot h$$

А, также учитывая, что основание элементарного прямоугольника связано с правым отсчетом функции, итоговая интегральная сумма будет иметь вид:

$$S = \sum_{i=1}^{i=n} S_i = \sum_{i=1}^{i=n} y_i \cdot h$$

где высота каждого элементарного прямоугольника равна диапазону, деленному на число участков n :

$$h = (X_{\text{end}} - X_{\text{beg}}) / n$$

По аналогии с методом левых прямоугольников приведем график изменения абсолютной ошибки АЕ при вычислении интеграла методом правых прямоугольников:

$$AE(X) = S(X) - \int_{X_{\text{beg}}}^X X^2 \cdot dx$$

Отметим, что точное значение интеграла (как функции от X) и соответственно площадь $S(X)$, изменяются по мере того, как аргумент X с шагом h возрастает в границах от $X_{\text{beg}} = 0$ до $X_{\text{end}}=1$. Общее число участков (или n) равно 63:

Сравнивая ошибки методов левых и правых прямоугольников (графики 3 и 5), можно обратить внимание на их почти зеркальный характер относительно оси X. Указанная симметрия не является абсолютно точной, однако позволяет сделать определенные предположения.

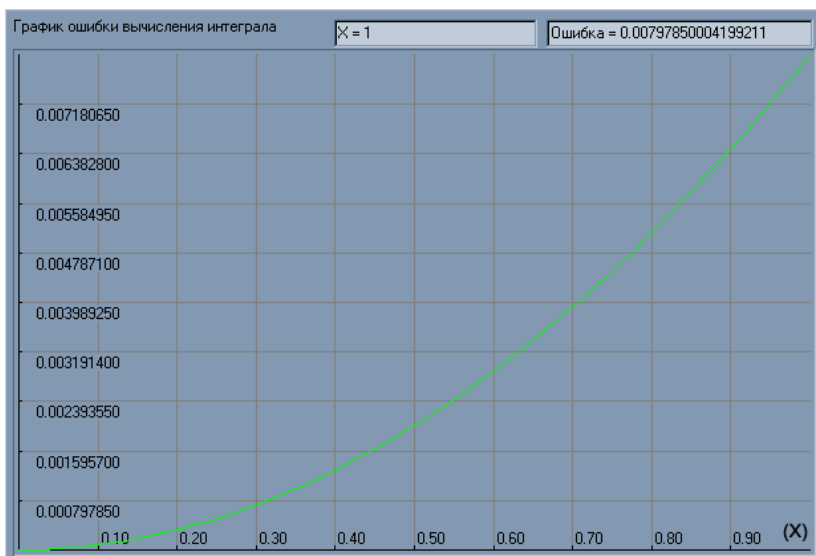


Рис. 5. График абсолютной ошибки вычисления интеграла как функции его верхнего предела методом правых прямоугольников

Суть этих предположений приводит к мысли о возможности эти ошибки усреднить. То есть, вычисляя элементарную площадь S_i на одном и том же участке в качестве результата взять среднее между ее значением по методу левых и правых прямоугольников. Такой подход приводит нас к методу трапеций.

Квадратурный метод трапеций

Полусумму или среднее между ее значениями S_i по методу левых и правых прямоугольников можно записать в следующем виде:

$$S_i = \frac{y_i \cdot (x_{i+1} - x_i) + y_{i+1} \cdot (x_{i+1} - x_i)}{2} \Big|_{x_{i+1} - x_i = const = h} = \frac{1}{2} (y_i + y_{i+1}) \cdot h$$

Кроме того, вычисление площади как полусуммы оснований умноженных на высоту, это определение известной геометрической формулы для вычисления площади трапеции, что и определило название данного метода.

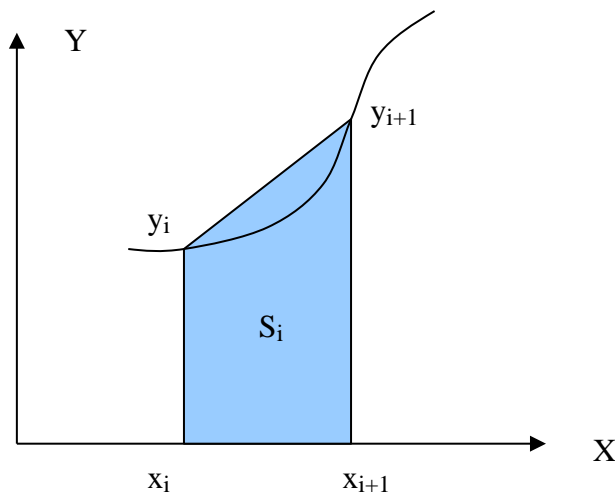


Рис. 6. Квадратура в виде трапеции с основаниями $F(X_i)$ и $F(X_{i+1})$

Поскольку теперь мы не можем называть элементарные площади S_i квадратами, для таких элементарных площадок было выбрано наименование «квадратура», а все дальнейшие методы получили название «квадратурные методы».

В методе трапеций для каждого участка высотой h будет использоваться как правый, так и левый отсчеты функции $F(X)$, а общая площадь под кривой (численное значение интеграла) будет определяться по формуле:

$$S = \sum_{i=0}^{i=n-1} S_i = \sum_{i=0}^{i=n-1} \frac{1}{2} \cdot (y_i + y_{i+1}) \cdot h = \frac{h}{2} \cdot \sum_{i=0}^{i=n-1} (y_i + y_{i+1})$$

где высота каждого элементарного прямоугольника равна диапазону, деленному на число участков n :

$$h = (X_{end} - X_{beg}) / n$$

Для сравнения с методами левых и правых прямоугольников приведем график изменения абсолютной ошибки AE при вычислении интеграла методом трапеций:

$$AE(X) = S(X) - \int_{X_{beg}}^X X^2 \cdot dx$$

Отметим, что точное значение интеграла (как функции от X) и соответственно площадь $S(X)$, изменяются по мере того, как аргумент X с шагом h возрастает в границах от $X_{beg} = 0$ до $X_{end} = 1$. Общее число участков (или n) равно 63:

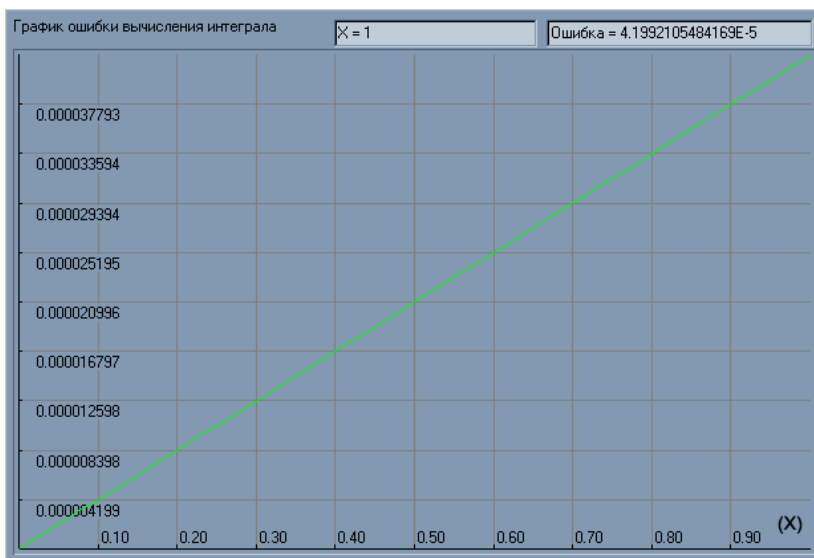


Рис. 7. График относительной ошибки интегрирования параболы X^2 в границах от 0 до 1 на 63 участках методом трапеций

Как видно из графиков и значений абсолютных ошибок, для интегралов с верхней границей интегрирования равной 1 точность метода трапеций значительно выше точности методов отдельно левых или правых прямоугольников. В случае параболы из нашего примера, абсолютная ошибка уменьшается почти на два порядка.

Пути повышения точности квадратурных методов.

Внимательный читатель сразу заметит, что численный пример с интегрирование параболы является частным случаем и дает нам только направление развития для идеи повышения точности вычислений. Это действительно так. Однако идея усреднения квадратур полученных разными методами для некоторого участка с знакосимметричными абсолютными ошибками имеет конструктивный характер. Примером тому могут служить интерполяционные полиномы Стирлинга, с которыми Вы ознакомитесь либо на старших курсах, либо (в силу необходимости) самостоятельно.

В нашем случае сосредоточим внимание на отличиях между квадратурами левых, правых прямоугольников и квадратурами трапеций. Суть этих различий заключается не только в геометрических представлениях квадратур, но также и в аналитических описаниях для вычисления таких квадратур. То есть, если для описания квадратур использовать некоторую аналитическую функцию $P(T)$ от независимой переменной T , то такую функцию можно будет интегрировать аналитическим образом (например, с помощью табличных интегралов) и, тем самым получать численные значения конкретных S_i .

Так для квадратур левых и правых прямоугольников такая функция может соответственно иметь вид:

$$P(T) = A_0 i; \quad \text{где: } A_0 i = F(X_i) \quad \text{или} \quad A_0 i = F(X_{i+1});$$

Для квадратур метода трапеций функцию $P(T)$ можно записать так:

$$P(T) = A_0 + A_1 \cdot T; \quad \text{где: } A_0 = F(X_i), \quad \text{и} \quad A_1 = \frac{F(X_{i+1}) - F(X_i)}{X_{i+1} - X_i};$$

если переменная T будет изменяться от нуля до значения $(X_{i+1} - X_i)$.

Из предложенных геометрических и аналитических описаний квадратур легко сделать несколько выводов.

1) Если для квадратур левых и правых прямоугольников мы фактически заменяем исходную функцию $F(X)$ ступенькой $P(T)$, то для квадратур по методу трапеций $P(T)$ представляет уже описание линий для каждого конкретного участка. Подчеркнем, что ступенька и линия являются соответственно степенными полиномами нулевой и первой степени. Кроме того, линия ближе примыкает к кривой $F(X)$ чем это делает ступенька. Очевидно, что если функции $F(X)$ и $P(T)$ на каждом конкретном участке полностью накладываются друг на друга, то абсолютная ошибка будет стремиться к нулю. Таким образом, логично (используя принцип индукции) предложить в качестве обобщенного вида функции $P(T)$ полином k -той степени, который будет максимально примыкать к кривой $F(X)$:

$$P(T) = \sum_{i=0}^k A_i \cdot T^i$$

2) Естественным образом возникает вопрос о способе вычисления коэффициентов такого полинома. В приведенном сравнении мы также можем заметить подсказку тому, как это делать. Обратим внимание, что значение A_1 для квадратуры трапеций, который (при предельном переходе) стремится к первой производной от функции $F(X)$ в точке X_i .

$$\lim_{(X_{i+1}-X_i) \rightarrow 0} \left[\frac{F(X_{i+1}) - F(X_i)}{X_{i+1} - X_i} \right] \rightarrow \frac{dF(X)}{dX};$$

Тем самым в качестве способа для определения коэффициента полиномов $P(T)$ логично предложить способ вычисления коэффициентов который применяется в рядах Тейлора или Маклорена. Это подразумевает вычисление на основе разностей функции $F(X)$ ее производных различных порядков для соответствующих точек X_i . Данный подход использовался многими известными математиками, например Ньютоном, Гауссом, Бесселем и другими.

Однако для начала, мы рассмотрим логически более прозрачный способ определения искомых коэффициентов A_i . Идея этого способа заключается в нахождении некоторого полинома $P(T)$, который на конкретном участке гарантированно проходит через заданные отсчеты $F(X_i)$. Коэффициенты A_i такого полинома можно определить путем составления системы линейных уравнений. Подчеркнем, что неизвестными в такой системе линейных уравнений будут искомые нами коэффициенты A_i .

Рассмотрим пример составления такой системы линейных уравнений для полинома $P(T)$ второй степени:

$$P(T) = A_0 + A_1 \cdot T + A_2 \cdot T^2$$

Как и в случае, ранее рассмотренных квадратур, пусть отсчеты Y_i или численные значения функции $F(X_i)$ заданы нам с постоянным шагом по аргументу:

$$x_{i+1} - x_i = \text{const} = h$$

Поскольку аргумент полинома $P(T)$ изменяется начиная от нуля, а вычисленные значения полинома должны совпадать с отсчетами Y_i , при соответствующих аргументах, то составляемая система линейных уравнений будет иметь вид:

$$\begin{cases} Y_i &= A_0 \\ Y_{i+1} &= A_0 + A_1 \cdot h + A_2 \cdot h^2 \\ Y_{i+2} &= A_0 + A_1 \cdot (2 \cdot h) + A_2 \cdot (2 \cdot h)^2 \end{cases}$$

Поскольку коэффициент A_0 определяется автоматически, то система линейных уравнений разрешается достаточно просто. По этой причине мы не будем останавливаться на деталях ее решения и сразу приведем окончательные результаты:

$$A_0 = Y_i$$

$$A_1 = \frac{-3 \cdot Y_i + 4 \cdot Y_{i+1} - Y_{i+2}}{2 \cdot h}$$

$$A_2 = \frac{Y_i - 2 \cdot Y_{i+1} + Y_{i+2}}{2 \cdot h^2}$$

Теперь, когда функцию $F(X)$ на участке $X_i \dots X_{i+1}$ мы заменили полиномом $P(X)$ можно вычислить площадь соответствующей квадратуры S_i . Для этого воспользуемся табличным интегралом:

$$\int_0^{2h} x^m \cdot dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \Big|_0^{2h}$$

по отношению к каждому члену полинома P(X):

$$\int_0^{2h} P(T) \cdot dT = \left(A_0 \cdot T + \frac{A_1 \cdot T^2}{2} + \frac{A_2 \cdot T^3}{3} \right) \Big|_0^{2h}$$

После подстановки пределов интегрирования получим:

$$S_i = 2 \cdot A_0 \cdot h + 2 \cdot A_1 \cdot h^2 + \frac{8 \cdot A_2 \cdot h^3}{3}$$

После подстановки вычисленных значений коэффициентов Ai и приведения подобных, окончательный результат будет иметь вид:

$$S_i = \frac{h}{3} \cdot (Y_i + 4 \cdot Y_{i+1} + Y_{i+2})$$

Очевидно что, несмотря на относительно громоздкие построения и преобразования, окончательный результат имеет достаточно простой и компактный вид, а квадратура вычисленная таким способом получила наименования квадратуры Симпсона.

Квадратурная формула Симпсона

Площадь элементарной квадратурной формы, которая вычисляется путем аналитического интегрирования ближайшего к F(X) полинома второй степени P(T) на участке (Xi ..Xi+2) при равномерном шаге аргумента имеет вид:

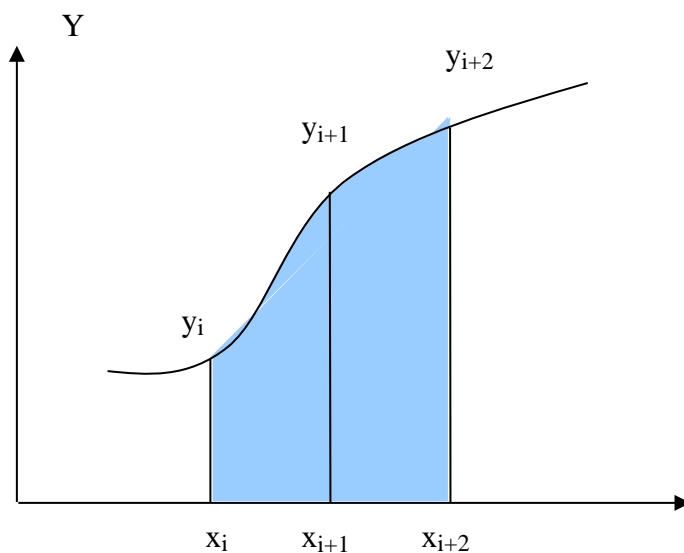


Рис. 8. Квадратура Симпсона, построенная по отсчетам F(Xi), F(X_{i+1}) и F(X_{i+2})

$$x_{j+1} - x_j = const = h$$

$$S_i = \frac{1}{3}(y_i + 4 \cdot y_{i+1} + y_{i+2}) \cdot h$$

Обратим внимание, что для построения одной квадратуры Симпсона необходимо два участка h . Это означает, что для вычисления всего интеграла в границах от X_{beg} до X_{end} , общее число участков n должно быть четным, то есть, кратным двойке. В этом случае, когда число участков четное, общая площадь под кривой (численное значение интеграла) будет определяться по формуле:

$$S = \sum_{i=0}^{i=n/2} S_i = \frac{h}{3} \cdot \sum_{i=0}^{i=n/2} (y_{2i} + 4 \cdot y_{2i+1} + y_{2i+2})$$

где длина каждого участка $h = (x_{end} - x_{beg}) / n$, а значение n – четное число участков.

При этом сразу возникает вопрос – а что делать, если общее число доступных участков является нечетным числом? Ответ достаточно прост – один из участков следует вычислить методом трапеций, оставшийся набор участков станет количественно четным.

Поскольку квадратура Симпсона описывается полиномом второй степени, то в случае, когда исходная функция $F(X)$ также является полиномом второй степени, абсолютная ошибка интегрирования будет равна нулю. По этой причине, для иллюстрации абсолютных ошибок АЕ воспользуемся следующим примером:

$$AE(X) = S(X) - \int_{X_{beg}}^X X^3 \cdot dx$$

Отметим, что точное значение интеграла (как функции от X) и соответственно площадь $S(X)$, изменяются по мере того, как аргумент X с шагом h возрастает в границах от $X_{beg} = 0$ до $X_{end}=1$. Общее число участков (или n) четное и равно 62:

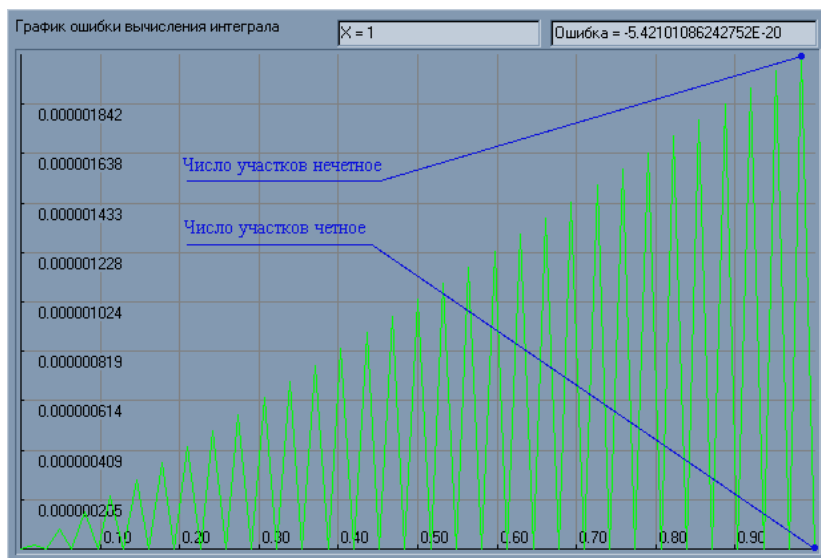


Рис. 9. График относительной ошибки интегрирования функции X^3 в границах от 0 до 1 на 62 участках методом Симпсона и последнего нечетного участка методом трапеций

Легко заметить, что когда X соответствует четному количеству участков абсолютная ошибка достаточно мала и составляет $5.42101086242752E-20$. При нечетном количестве участков трапеция на последнем участке вносит весьма ошутимую ошибку (когда X

соответствует трем участкам значение ошибки равно 1.69189439114E-8, когда X соответствует 61-му участку значение достигает 2.04719221327939E-6). Соотношение таких ошибок достигает почти 16-порядков. Таким образом, становится очевидным, что следует продолжить поиск приемлемого сочетания квадратурных методов.

Несколько модификаций квадратуры Симпсона

Рассматривая способ вывода формулы Симпсона, мы использовали полином P(T), значения которого совпадают со значениями исходной функции F(X) в трех соседних значениях аргумента или на участке длиной 2h. Соответственно квадратура Si вычислялась путем аналитического интегрирования этого полинома также на участке 2h. Однако нам также доступно выполнить такое интегрирование, как на левом, так и на правом участке длиной h. Тем самым вычислить квадратуру одиночного нечетного участка. Поскольку детали такого интегрирования мы уже рассматривали, то сразу приведем окончательный результат.

Квадратура для левого участка:

$$S_i^{(L)} = \int_0^h P(T) \cdot dT = \frac{h}{12} \cdot (5 \cdot Y_i + 8 \cdot Y_{i+1} - Y_{i+2})$$

Квадратура для правого участка:

$$S_i^{(R)} = \int_h^{2h} P(T) \cdot dT = \frac{h}{12} \cdot (-Y_i + 8 \cdot Y_{i+1} + 5 \cdot Y_{i+2})$$

Для сопоставимости воспользуемся оценкой абсолютных ошибок AE, рассмотренной в предшествующем примере:

$$AE(X) = S(X) - \int_{X_{beg}}^X X^3 \cdot dx$$

Отметим, что точное значение интеграла (как функции от X) и соответственно площадь S(X), изменяются по мере того, как аргумент X с шагом h возрастает в границах от Xbeg = 0 до Xend=1. Общее число участков (или n) четное и равно 62.

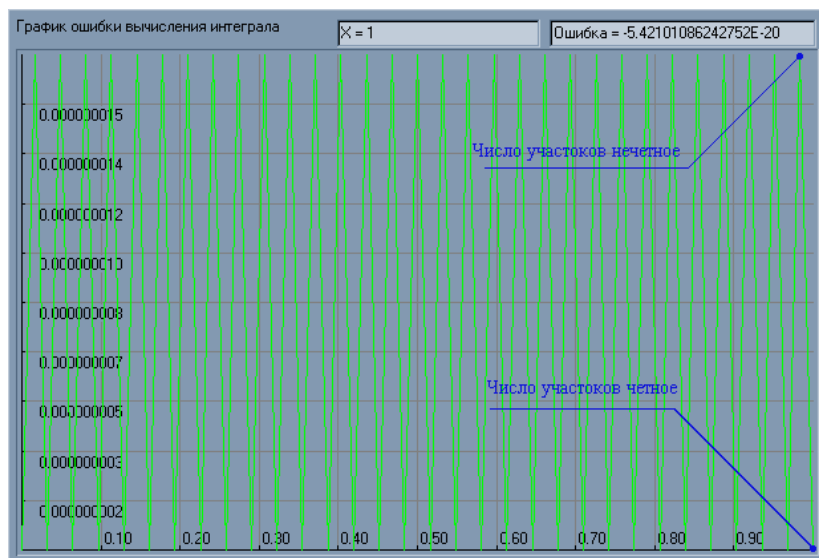


Рис. 10. Использование для последних нечетных участков квадратур $S_i^{(R)}$

Таким образом, когда для последних нечетных участков вместо трапеций мы применяем квадратуры $S_i^{(R)}$, точность вычисления улучшается. В рамках данного примера при любом

четном количестве участков абсолютная ошибка составляет $-5.42101086242752E-20$, а при любом нечетном количестве $1.69189439113977E-8$, что составляет отличие уже не на 16, а на 12 порядков.

Рассмотренное сочетание методов уже представляет инженерный интерес. По этой причине приведем вариант программной процедуры, которая реализует такой подход.

Пусть, дан заполненный отсчетами $F(X_i)$ массив следующего вида:

```
type TD1ArrP = array of record
    Y,          // Значение полинома
    X          // Аргумент полинома
    : extended;
end;

ArrP : TD1ArrP;      // Массив точек F(Xi)
```

Тогда для вычисления интеграла функцией `Simpson2IntegralIndBE`, необходимо указать начальный (`IndB`) и конечный (`IndE`) индексы в этом массиве, а также значение (`dX`) или h .

```
// -----
// Расчет интеграла квадратурами Симпсона на парных участках и
// специальной правой квадратурой Симпсона для последнего нечетного
// участка.
function Simpson2IntegralIndBE (RqArrP : TD1ArrP;
                               IndB, IndE : integer;
                               dX: extended) : extended;

var Ind : integer;
begin
    Result := 0;
    // Условие возможности интегрирования
    if (Length(RqArrP) < 2) or (IndB >= IndE) or
        (IndB < Low(RqArrP)) or (IndE > High(RqArrP)) then Exit;
    // Условие применения метода Симпсона
    if (IndE - IndB) >= 2
    then begin
        // Квадратуры Симпсона на парных участках
        Ind := IndB;
        while (Ind <= (IndE - 2))
        do begin
            Result := Result + (RqArrP[Ind].Y
                                + 4 * RqArrP[Ind + 1].Y
                                + RqArrP[Ind + 2].Y);

            Ind := Ind + 2
        end;
        Result := Result / 3;
        if ((IndE - IndB) mod 2) > 0
        then begin
            // Правая квадратура Симпсона на последнем непарном участке
            Result := Result
                + ( - RqArrP[IndE - 2].Y
                  + 8 * RqArrP[IndE - 1].Y
                  + 5 * RqArrP[IndE].Y ) / 12;
        end;
        Result := Result * dX;
    end
    // Для малого числа отсчетов применить альтернативный метод
    else Result := TrapezIntegralIndBE (RqArrP, IndB, IndE, dX);
end; // of Simpson2IntegralIndBE
```

Рассматривая переход от квадратур левых и правых прямоугольников к квадратурам трапеций мы применяли усреднение. Возможен ли такой подход для левых и правых

квадратур Симпсона. Для ответа на этот вопрос рассмотрим отклонения между исходной функцией $F(X)$ и полиномом $P(X)$.

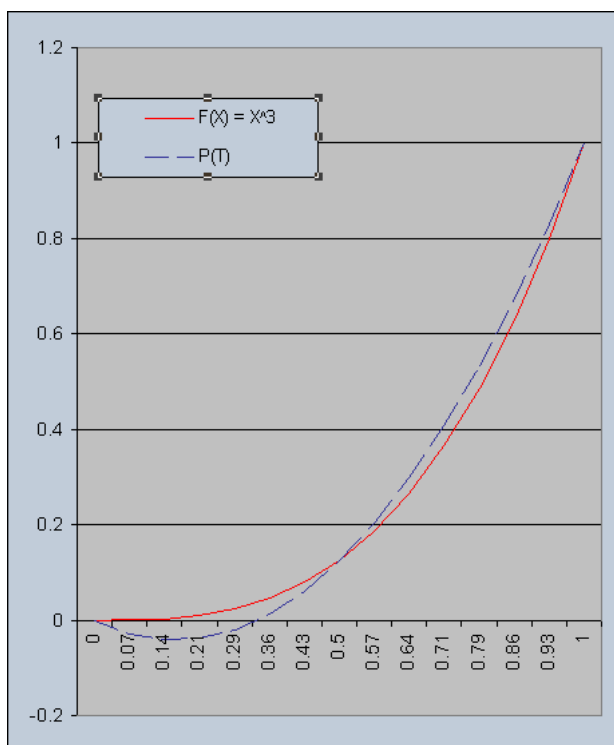


Рис. 11. Графики функции $F(X)$ и полинома $P(X)$

На графике (рис. 11) в диапазоне $X_{\text{beg}}=0$, $X_{\text{end}}=1$ представлены функция $F(X)$ и полинома $P(X)$, которые имеют одинаковые значения в точках $X=0$; $X=0,5$; $X=1$. При этом:

$$F(X) = X^3$$

$$P(T) = 0 - 0,5 \cdot T + 1,5 \cdot T^2 \quad \text{где} \quad T = X;$$

Как видно из этого численного примера, отклонения между функцией $F(X)$ и полиномом $P(X)$ имеют на участках знакопеременные значения. Таким образом, усреднение двух, сдвинутых относительно друг друга левой и правой квадратур Симпсона, может иметь конструктивный характер.

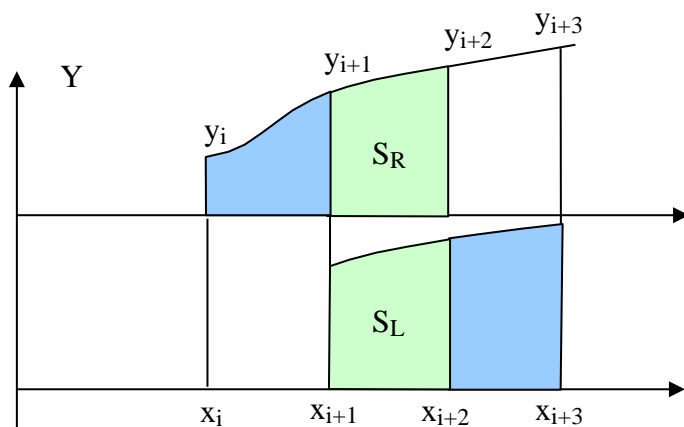


Рис. 12. Сдвинутые относительно друг друга левая и правая квадратуры Симпсона

Результат такого усреднения, после приведения «подобных» будет иметь вид:

$$S^{(M)} = \frac{S_i^{(R)} + S_{i+1}^{(L)}}{2} = \frac{h}{24} \cdot (13 \cdot (Y_{i+1} + Y_{i+2}) - (Y_i + Y_{i+3}))$$

Для алгоритмической реализации вычисления нечетного участка методом усредненной квадратурой Симпсона нам потребуется как минимум 5 участков или 6 отсчетов функции $F(X)$. При этом у нас появляется возможность вычислить две классические квадратуры Симпсона и одну усредненную.

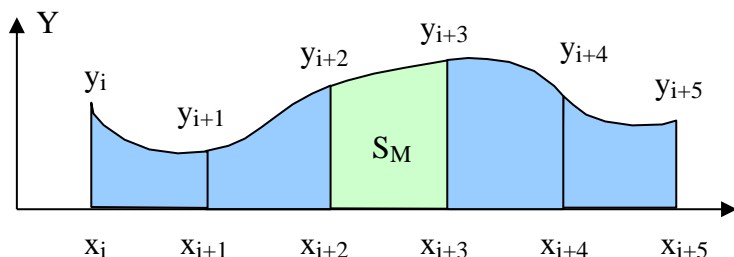


Рис. 13. Схема вычисления нечетного участка усредненной квадратурой Симпсона

Исходный текст процедуры для реализации такого алгоритма, в котором усредненная квадратура Симпсона вычисляется в начале области интегрирования представлен ниже:

```
// Расчет интеграла квадратурами Симпсона диапазоне индексов IndB, IndE.
// Для нечетного участка применяется усредненная квадратура Симпсона.
function Simpson3IntegralIndBE (RqArrP : TD1ArrP;
                                IndB, IndE : integer;
                                dX: extended) : extended;

var Ind : integer;
begin
    Result := 0;
    // Условие возможности интегрирования
    if (Length(RqArrP) < 2) or (IndB >= IndE) or
        (IndB < Low(RqArrP)) or (IndE > High(RqArrP)) then Exit;
    // Условие применения метода
    if (IndE - IndB) >= 6
    then begin
        if ((IndE - IndB) mod 2 > 0)
        then begin
            // Обычная и усредненная квадратуры Симпсона
            // на начальных участках
            Result := (RqArrP[IndB].Y
                      + 4*RqArrP[IndB+1].Y
                      + RqArrP[IndB+2].Y
                      );
            Result := Result + (13*(RqArrP[IndB+2].Y+RqArrP[IndB+3].Y)
                               - (RqArrP[IndB+1].Y+RqArrP[IndB+4].Y)
                               )/8;
            Ind := IndB + 3;
        end
        else Ind := IndB;
        // Обычные квадратуры Симпсона на парных (четных) участках
        while (Ind <= (IndE - 2))
        do begin
            Result := Result + (RqArrP[Ind].Y
                                + 4 * RqArrP[Ind + 1].Y
                                + RqArrP[Ind + 2].Y
                                );
            Ind := Ind + 2;
        end;
        Result := Result * dX / 3;
    end;
end;
```



```

end
// Применить альтернативный метод
else Result := Simpson2IntegralIndBE (RqArrP, IndB, IndE, dx);
end; // of Simpson3IntegralIndBE

```

Также как и ранее, для сопоставимости, воспользуемся оценкой абсолютной ошибки AE, рассмотренной в предшествующем примере:

$$AE(X) = S(X) - \int_{X_{beg}}^X X^3 \cdot dx$$

Отметим, что точное значение интеграла (как функции от X) и соответственно площадь S(X), изменяются по мере того, как аргумент X с шагом h возрастает в границах от Xbeg = 0 до Xend=1. Общее число участков (или n) четное и равно 62.

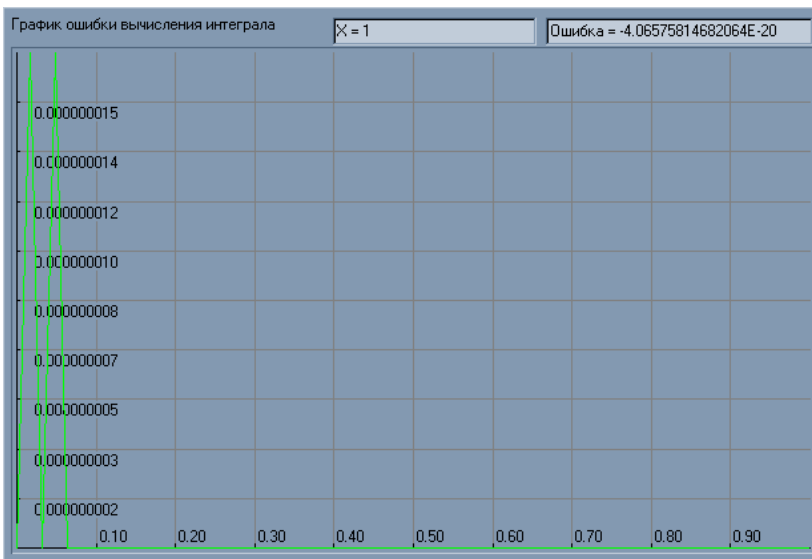


Рис. 14. График абсолютной ошибки при использовании для начальных нечетных участков квадратур $S^{(M)}$

Из приведенного графика видно, что пока число участков для вычисления интеграла менее пяти, алгоритм переходит на менее точные сочетания методов, а, начиная с пяти участков, абсолютная ошибка становится минимальной, то есть, приблизительно равна значению $-5E-20$.

Завершая данный раздел, приведем результаты нескольких численных примеров с другими видами функций F(X) для вычисления интегралов которых используются комбинации квадратур Симпсона и квадратура $S^{(M)}$:

- Функция $F(X) = X^4$ на интервале интегрирования (0..1) с 62 участками.
- Функция $F(X) = \sin(X)$ на интервале интегрирования (0..2 π) с 62 участками.
- Функция $F(X) = \frac{\sin(X)}{X}$ на интервале интегрирования (0..2 π) с 62 участками.
- Функция $F(X) = \exp(X)$ на интервале интегрирования (0..1) с 62 участками.

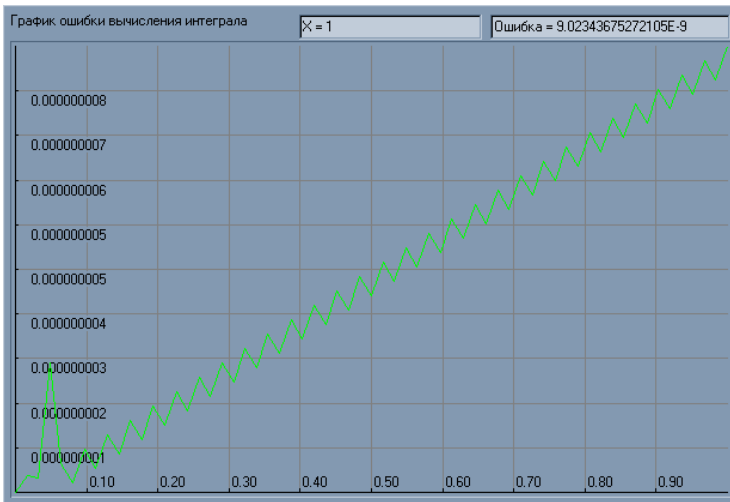


Рис. 15. Абсолютные ошибки интегрирования функции $F(X) = X^4$ на интервале интегрирования (0..1) с 62 участками.

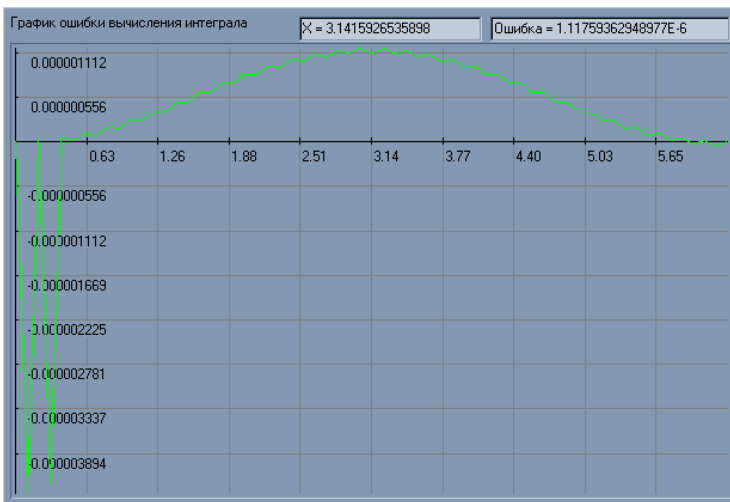


Рис. 16. Абсолютные ошибки интегрирования функции $F(X) = \sin(X)$ на интервале интегрирования (0..2π) с 62 участками

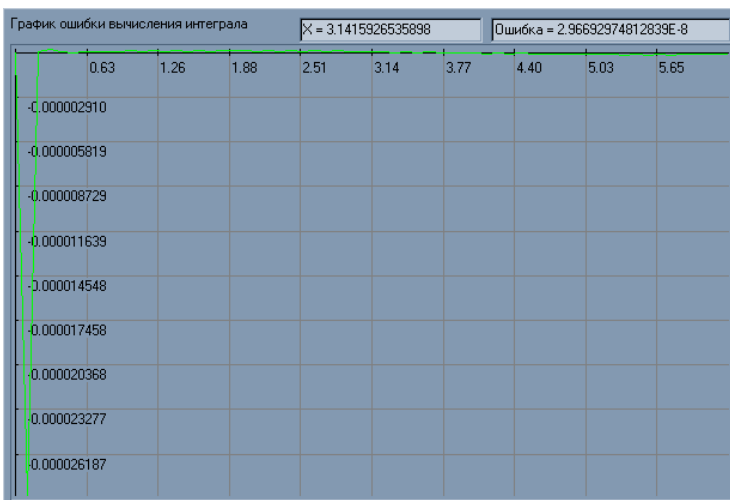


Рис 17. Абсолютные ошибки интегрирования функции $F(X) = \frac{\sin(X)}{X}$ на интервале интегрирования (0..2π) с 62 участками.

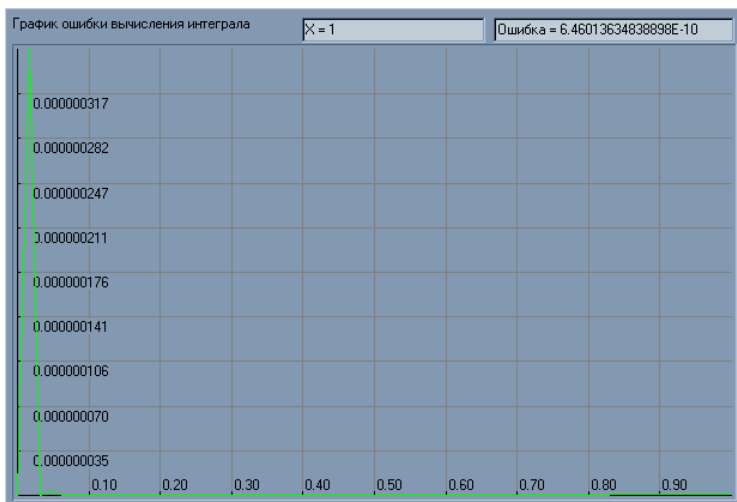


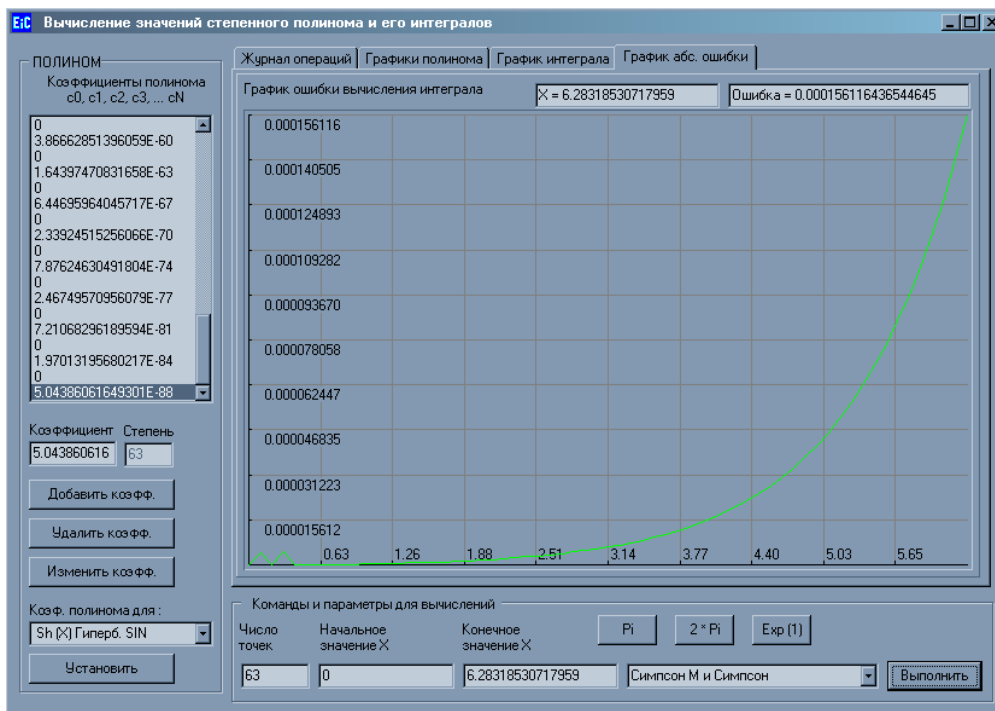
Рис. 18. Абсолютные ошибки интегрирования функции $F(X) = \exp(X)$ на интервале интегрирования (0..1) с 62 участками.

Рекомендуемая литература

- 1) Мудров А.Е. Численные методы для ПЭВМ на языках Бейсик, Фортран и Паскаль. Томск:МП «РАСКО», 1991.-272с.:ил.
- 2) Бахвалов Н. С. Численные методы. / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков.--М.: Наука, 1987.-630с.:ил.
- 3) Калиткин Н.Н. Численные методы.-М.:Наука, 1978.-512с.:ил.

Приложения

Для проведения численных экспериментов использовалась компьютерная программа Integral, экранная форма которой представлена на следующем рисунке:



Данная программа прилагается к материалу лекции.

Исходными данными для программы являются коэффициенты полинома, которые свободно можно редактировать. Кроме того, имеется возможность автоматического заполнения коэффициентов полинома пакетами коэффициентов рядов Маклорена для целого ряда функций:

- Sin (X)
- SI (X) Интегральный. SIN
- Sin(X) / X
- Sh (X) Гиперболический SIN
- Cos (X)
- Ch (X) Гиперболический COS
- Exp (X)
- ArcSin (X), $|X| \leq 1$
- ArcTg (X)

В числе методов, которые реализует программа реализованы следующие методы и их сочетания:

- Метод левых прямоугольников
- Метод правых прямоугольников
- Метод трапеций
- Симпсон и трапеция
- Симпсон и Симпсон R
- Симпсон M и Симпсон

Киев 2014.