Логические законы

В алгебре логики доказано, что любую логическую функцию можно выразить только через комбинацию логических операций *И, ИЛИ* и *НЕ*. Для приведения логических выражений к эквивалентным, но более простым в записи используют ряд логических законов.

Закон тождества. Сформулирован древнегреческим философом Аристотелем. Закон утверждает, что мысль, заключенная в некотором высказывании, остается неизменной на протяжении всего рассуждения, в котором это высказывание фигурирует.

$$X=X \tag{1}$$

Закон противоречия говорит о том, что никакое предложение не может быть истинно одновременно со своим отрицанием. "это яблоко спелое" и "это яблоко неспелое".

$$\overline{X} \,\&\, X = 0 \tag{2}$$

Закон исключенного третьего говорит о том, что для каждого высказывания имеются лишь две возможности: это высказывание либо истинно, либо ложно. Третьего не дано. "Сегодня я либо получу 5, либо не получу". Истинно либо суждение, либо его отрицание.

$$\overline{X} \mid X = 1 \tag{3}$$

Закон двойного отрицания заключается в том, что отрицать отрицание какого-нибудь высказывания - то же, что утверждать это высказывание. " Неверно, что 2*2<>4".

$$\overline{\overline{X}} = X \tag{4}$$

Законы идемпотентности говорят о том, что в алгебре логики нет показателей степеней и коэффициентов. Конъюнкция одинаковых "сомножителей" равносильна одному из них. Дизъюнкция одинаковых "слагаемых" равносильна одному из них.

$$\begin{gathered} X \,\&\, X = X \\ X \mid X = X \end{gathered} \tag{5}$$

Законы коммутативности и ассоциативности говорят о том, что конъюнкция и дизъюнкция аналогичны одноименным знакам умножения и сложения чисел.

Законы коммутативности
$$\begin{gathered} X \mid Y = Y \mid X \\ X \,\&\, Y = Y \,\&\, X \end{gathered} \tag{6}$$

Законы ассоциативности
$$\begin{gathered} (X \mid Y) \mid Z = X \mid (Y \mid Z) \\ (X \,\&\, Y) \,\&\, Z = X \,\&\, (Y \,\&\, Z) \end{gathered} \tag{7}$$

Законы дистрибутивности говорят о том, что логическое сложение и умножение равноправны по отношению к дистрибутивности: не только конъюнкция дистрибутивна относительно дизъюнкции, но и дизъюнкция дистрибутивна относительно конъюнкции.

$$X \mid (Y \,\&\, Z) = (X \mid Y) \,\&\, (Y \mid Z)$$
$$X \,\&\, (Y \mid Z) = (X \,\&\, Y) \mid (X \,\&\, Z) \tag{8}$$

Законы де Моргана показывают как отрицаются высказывания.

Август де Морган (1806-1871) - шотландский математик и логик. Родился в Индии в семье полковника английских войск. Получил высшее образование в Кембриджском университете. Август состоял профессором математики Лондонского университета. Математику и логику он называл очами точного знания и выражал сожаление, что математики не более заботятся о логике, чем логики о математике. Сам он стремился сблизить обе науки и его главной заслугой явилось построение логики по подобию математических наук.

$$\overline{X \,\&\, Y} = \overline{X} \mid \overline{Y}$$
$$\overline{X \mid Y} = \overline{X} \,\&\, \overline{Y} \tag{9}$$

Эти законы можно выразить в следующих кратких словесных формулировках:

- отрицание логического произведения эквивалентно логической сумме отрицаний множителей;
- отрицание логической суммы эквивалентно логическому произведению отрицаний слагаемых.

Законы поглощения констант утверждают, что ложь не влияет на значение логического выражения при дизъюнкции, а истина - при конъюнкции.

$$X \mid 0 = X$$
$$X \,\&\, 1 = X \tag{10}$$

Законы поглощения показывают как упрощать логические выражения при повторе операнда.

$$X \mid (X \,\&\, Y) = X$$
$$X \,\&\, (X \mid Y) = X \tag{11}$$